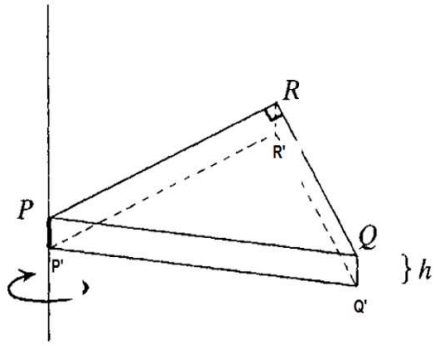
Física para el Teorema de Pitágoras

Hugo Luyo Sánchez *
h.luyo@pucp.edu.pe

Una de los teoremas más populares es el de Pitágoras, el cual dice que en un triángulo rectángulo de catetos a y b he hipotenusa c, se cumple que $a^2+b^2=c^2$. Hay muchas demostraciones con áreas, relaciones métricas y otras bondades geométricas, sin embargo también hay una demostración usando argumentos de Física, la cual presento en este trabajo, basado en el artículo *Mechanical Ideas in Geometry* de *Tadashi F. Tokieda* [1].

Siendo PQR un triángulo rectángulo recto en R, contruímos una caja de la siguiente manera, hacemos una copia de PQR llamada $P^{'}Q^{'}R^{'}$ y la colocamos a una distancia h por debajo de PQR y paralela a éste,tal como se muestra en la figura

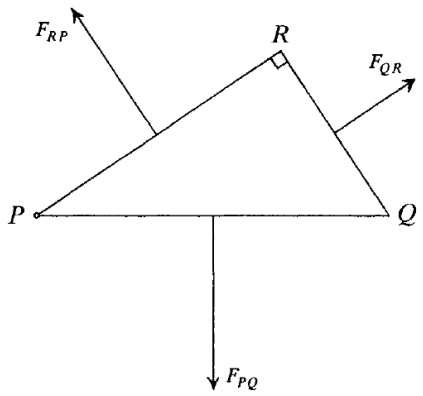


Hacemos pasar un eje vertical por $PP^{'}$ de tal forma que la caja pueda girar libremente de éste, pero no deslizar verticalmente, luego llenamos la caja con un gas a presión p, como sabemos el gas ejerce una fuerza perpendicular sobre las paredes del recipiente que lo contiene, en este caso sobre las cinco caras de la caja.

Dado que la caja no puede deslizar verticalmente, las fuerzas sobre las caras PQR y $P^{'}Q^{'}R^{'}$ se anulan, sólo nos quedan las fuerzas sobre las caras laterales.

*Pontificia Universidad Católica del Perú
[1] American Mathematical Monthly,Vol. 105,Número 8, 1998

Si mirásemos desde arriba de la cara PQR, veríamos que las fuerzas resultantes sobre cada una de las caras se verían así



notar que la fuerza $\vec{F}_{RP}$ actúa sobre el centro de la cara $PRP^{'}R^{'}$, la fuerza $\vec{F}_{QR}$ actúa sobre el centro de la cara $QRQ^{'}R^{'}$, y la fuerza $\vec{F}_{PQ}$ actúa sobre el centro de la cara $PQP^{'}Q^{'}$.
De esta forma ,$\vec{F}_{PQ}$ trata de que la caja rote en sentido horario, mientras que $\vec{F}_{RP}$ y $\vec{F}_{QR}$ tratan de que rote en sentido antihorario.La caja rotaría por el hecho de que cada una de las fuerzas genera un torque respecto del punto medio H de $PP^{'}$. Si $\vec{F}_{PQ}$ lograra su objetivo obtendríamos un móvil perpetuo, lo cual no es posible,entonces el torque de $\vec{F}_{PQ}$ respecto de H

$$\left|\vec{F}_{PQ}\right| \cdot \frac{PQ}{2}$$

debe ser balanceado por el torque de $\vec{F}_{QR}$ respecto de H

$$\left|\vec{F}_{QR}\right| \cdot \frac{QR}{2}$$

y por el torque de $\vec{F}_{RP}$ respecto de H

$$\left|\vec{F}_{RP}\right| \cdot \frac{RP}{2}$$

lo cual resulta en la ecuación de equilibrio rotacional

$$\left|\vec{F}_{PQ}\right| \cdot \frac{PQ}{2} = \left|\vec{F}_{QR}\right| \cdot \frac{QR}{2} + \left|\vec{F}_{RP}\right| \cdot \frac{RP}{2}$$

Ahora, como el gas ejerce la misma presión sobre cada una de las caras, y de la definición de presión

$$p = \frac{F}{A}$$

donde F es el módulo de la fuerza sobre la superficie de área A, en nuestro caso el área sobre el cual actúa $\vec{F}_{PQ}$ es $h \cdot PQ$, $\vec{F}_{QR}$ es $h \cdot QR$ y $\vec{F}_{RP}$ es $h \cdot PR$, por tanto

$$\left|\vec{F}_{PQ}\right| = p\,h \cdot PQ$$
$$\left|\vec{F}_{QR}\right| = p\,h \cdot QR$$
$$\left|\vec{F}_{RP}\right| = p\,h \cdot PR$$

reemplazando estos resultados en la ecuación de equilibrio

$$p\,h\frac{(PQ)^2}{2} = p\,h\frac{(QR)^2}{2} + p\,h\frac{(RP)^2}{2}$$

simplificando $ph/2$, nos da

$$PQ^2 = QR^2 + RP^2$$

lo cual es el Teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulo PQR recto en R. Como hemos visto en la demostración se aplicó muchos conceptos y definiciones sencillas,existen seis demostraciones más de este teorema aplicando Física cada uno más elaborado que el anterior,además de otros teoremas geómetricos que admiten demostraciones semejantes, uno de los desarrolladores de este estilo es *Mark Levi* autor del artículo titulado *Minimal Perimeter Triangles* [2].

[2] American Mathematical Monthly, Volumen 109, Número 10, 2002