Problemas de Olimpiadas

Hugo Luyo Sánchez

1[1] Probar que si x,y y z son números reales no nulos con $x+y+z=0$ entonces

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{x^2+z^2}{x+z}+\frac{y^2+z^2}{y+z}=\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{xz}+\frac{z^3}{xy}$$

Solución:

A partir de la condición $x+y+z=0$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{x^2+z^2}{x+z}+\frac{y^2+z^2}{y+z} &= \frac{x^2+y^2}{-z}+\frac{x^2+z^2}{-y}+\frac{y^2+z^2}{-x}\\ &= \frac{-x^2}{z}+\frac{-y^2}{z}+\frac{-y^2}{x}+\frac{-z^2}{x}+\frac{-x^2}{y}+\frac{-z^2}{y}\\ &= -x^2(\frac{y+z}{yz})-y^2(\frac{x+z}{xz})-z^2(\frac{y+x}{yx})\\ &= -x^2(\frac{-x}{yx})-y^2(\frac{-y}{xz})-y^2(\frac{-y}{xz})\\ &= \frac{x^3}{zy}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy}\end{aligned}$$

2[1] Resolver en números complejos la ecuación

$$(x+1)(x+2)(x+3)^2(x+4)(x+5)=360$$

Solución:

Reordenando los términos y multiplicando

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x+3)^2(x+4)(x+5) &= (x+1)(x+5)(x+2)(x+4)(x+3)^2\\ &= (x^2+6x+5)(x^2+6x+8)(x^2+6x+9)\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $x^2+6x=m$

$$\begin{aligned}(x^2+6x+5)(x^2+6x+8)(x^2+6x+9) &= (m+5)(m+8)(m+9)\\ &= (m^2+13m+40)(m+9)\\ &= m^3+13m^2+40m+9m^2+117m+360\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación original

$$\begin{aligned} m^3 + 13m^2 + 40m + 9m^2 + 117m + 360 &= 360 \\ m^3 + 22m^2 + 157m &= 0 \\ m(m^2 + 22m + 157) &= 0 \\ m(m+9)(m+13) &= 0 \end{aligned}$$

De la última ecuación obtenemos tres casos $m = 0$, $m+9 = 0$ y $m+13 = 0$

Caso 1:

$$m = x^2 + 6x = 0 \;\Rightarrow\; x(x+6) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \;\wedge\; x_2 = -6$$

Caso 2:

$$m + 9 = x^2 + 6x + 9 = 0 \;\Rightarrow\; (x+3)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{3,4} = -3$$

Caso 3:

$$m + 13 = x^2 + 6x + 13 = 0 \;\Rightarrow\; x_{5,6} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(13)}}{2} = -3 \pm 2i$$

3[1] Resolver la ecuación

$$\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+\ldots\sqrt{4^n x+3}}}}-\sqrt{x}=1$$

Solución:

Pasando el segundo término del lado derecho al lado izquierdo y luego elevando al cuadrado

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+\ldots\sqrt{4^n x+3}}}} &= 1+\sqrt{x}\\
(\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+\ldots\sqrt{4^n x+3}}}})^2 &= (1+\sqrt{x})^2\\
x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+\ldots\sqrt{4^n x+3}}} &= 1+x+2^1\sqrt{x}\\
\sqrt{4x+\sqrt{16x+\ldots\sqrt{4^n x+3}}} &= 1+2^1\sqrt{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sqrt{4x+\sqrt{16x+\ldots\sqrt{4^n x+3}}})^2 &= 1+4x+2^2\sqrt{x}\\
\sqrt{16x+\ldots\sqrt{4^n x+3}} &= 1+2^2\sqrt{x}\\
\vdots &= \vdots\\
\sqrt{4^n x+3} &= 1+2^n\sqrt{x}\\
(\sqrt{4^n x+3})^2 &= (1+2^n\sqrt{x})^2\\
4^n x+3 &= 1+2^{n+1}\sqrt{x}+2^{2n}x\\
2^n\sqrt{x} &= 1\\
x &= \frac{1}{2^{2n}}
\end{aligned}$$

4[1] Resolver en los reales la ecuación

$$\sqrt{x_1-1}+2\sqrt{x_2-4}+\ldots n\sqrt{x_n-n^2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2+\ldots x_n)$$

Solución:

Multiplicando ambos lados por 2

$$2\sqrt{x_1-1}+2(2)\sqrt{x_2-4}+\ldots 2n\sqrt{x_n-n^2}=x_1+x_2+\ldots+x_n$$

Sumando y restando una misma cantidad al miembro izquierdo de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 - 1 + x_2 - 4 + \ldots + x_n - n^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$$

Pasando todos los términos a un mismo lado de la ecuación y ordenándoles adecuadamente

$$\begin{aligned}
x_1 - 1 + x_2 - 4 + \ldots + x_n - n^2 \\
-(2\sqrt{x_1 - 1} + 2(2)\sqrt{x_2 - 4} + \ldots + 2n\sqrt{x_n - n^2}) \\
+1 + 4 + \ldots + n^2 = 0 \\
\sqrt{x_1 - 1}^2 + -2\sqrt{x_1 - 1} + 1^2 + \sqrt{x_2 - 2}^2 + -2(2)\sqrt{x_2 - 2} + 2^2 \\
+ \ldots + \sqrt{x_n - n^2}^2 + -2(n)\sqrt{x_n - n^2} + n^2 = 0 \\
(\sqrt{x_1 - 1} - 1)^2 + (\sqrt{x_2 - 4} - 2)^2 + \ldots + (\sqrt{x_n - n^2} - n)^2 = 0
\end{aligned}$$

A partir de $x^2 \geq 0$ se deduce las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\sqrt{x_1 - 1} - 1 = 0 \;&\Rightarrow\; x_1 = 2 = 2 \times 1^2 \\
\sqrt{x_2 - 4} - 2 = 0 \;&\Rightarrow\; x_2 = 8 = 2 \times 2^2 \\
\vdots &= \vdots \\
\sqrt{x_n - n^2} - n = 0 \;&\Rightarrow\; x_n = 2 \times n^2
\end{aligned}$$

5[1] Resolver en los reales el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
y^2 + u^2 + v^2 + w^2 &= 4x - 1 \\
x^2 + u^2 + v^2 + w^2 &= 4y - 1 \\
x^2 + y^2 + v^2 + w^2 &= 4u - 1 \\
x^2 + y^2 + u^2 + w^2 &= 4v - 1 \\
x^2 + y^2 + u^2 + v^2 &= 4w - 1
\end{aligned}$$

Sumando las miembro a miembro las 5 ecuaciones

$$\begin{aligned}
4x^2 + 4y^2 + 4u^2 + 4v^2 + 4w^2 &= 4x + 4y + 4u + 4v + 4w - 4 \\
4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 + 4u^2 - 4u + 1 + 4v^2 - 4v + 1 + 4w^2 &= 0 \\
(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 + (2u - 1)^2 + (2v - 1)^2 + (2w - 1)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Aplicando $x^2 \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
2x - 1 = 0 \;&\Rightarrow\; x = 1/2 \\
2y - 1 = 0 \;&\Rightarrow\; y = 1/2 \\
2u - 1 = 0 \;&\Rightarrow\; u = 1/2 \\
2v - 1 = 0 \;&\Rightarrow\; v = 1/2 \\
2w - 1 = 0 \;&\Rightarrow\; w = 1/2
\end{aligned}$$

6[2] Hallar todos los pares (x, y) de reales, los cuales satisfacen el sistema de ecuaciones

$$x^3 + 1 - xy^2 - y^2 = 0$$
$$y^3 + 1 - x^2y - x^2 = 0$$

Solución:

Restando la segunda ecuación de la primera

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - xy^2 + x^2y - y^2 + x^2 &= 0 \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2) + xy(x-y) + (x+y)(x-y) &= 0 \\ (x-y)\left[(x^2 + xy + y^2 + xy + x + y)\right] &= 0 \\ (x-y)\left[(x + y^2 + x + y)\right] &= 0 \\ (x-y)(x+y)(x+y+1) &= 0 \end{aligned}$$

De la última ecuación deducimos tres casos ,$x = y$, $x = -y$ y $x + y = -1$

Caso 1: $x = y$

Reemplazando en la primera ecuación

$x^3+1-x^3-x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2-1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1,\; y = 1 \wedge x = -1,\; y = -1$

Caso 2: $x = -y$

$x^3+1-x^3-x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2-1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1,\; y = -1 \wedge x = -1,\; y = 1$

Caso 3: $x + y = -1 \;\Rightarrow\; y = -(x+1)$

$$\begin{aligned} x^3 + 1 - x(x+1)^2 - (x+1)^2 &= 0 \\ x^3 + 1 - x(x^2 + 2x + 1) - (x^2 + 2x + 1) &= 0 \\ x^3 + 1 - x^3 - 2x^2 - x - x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ -3x(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

De esto se deduce $\Rightarrow x = 0,\; y = -1 \;\wedge\; x = -1,\; y = 0$

7[3] Hallar todas las soluciones reales al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} &= 10 \\ x^2 - y^2 - z^2 &= 476 \\ 2^{\lg|y| - \lg z} &= 1 \end{aligned}$$

Solución:

De la última ecuación deducimos

$$\lg|y| - \lg = 0 \;\Rightarrow\; \lg(\frac{|y|}{z}) = 0 \;\Rightarrow\; z = |y|$$

Elevando al cuadrado la primera ecuación, obtenemos

$$2x + 2\sqrt{x^2 - y^2} = 100 \;\Rightarrow\; x + \sqrt{x^2 - y^2} = 50$$

Haciendo uso de la segunda ecuación y de la última relación hallada

$$x + \sqrt{z^2 + 476} = 50$$

Ahora analizemos $z^2 + 476$, esta expresión debe ser una cuadrado perfecto para que al sacarle la raíz se obtenga un entero,pues al sumarle x se obtenga el entero 50, además z^2 es un cuadrado perfecto,para que se cumpla ambas condiciones tenemos

$$z^2 = 100 \;\Rightarrow\; z = 10 \;\wedge\; z^2 + 476 = 576$$

Reemplazando en la expresión $x + \sqrt{z^2 + 476} = 50$

$$x + \sqrt{576} = x + 24 = 50 \;\Rightarrow\; x = 26$$

Y como $z = |y|$

$$|y| = 10 \;\Rightarrow\; y = 10 \;\wedge\; y = -10$$

De esto, tenemos dos soluciones

$$x = 24, y = 10, z = 10$$

y $x = 24, y = -10, z = 10$

8[4] Hallar el máximo y mínimo valor de la expresión $P = x + y$, donde x y y son números reales que satisfacen

$$x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$$

Solución:

Arreglando un poco la apariencia de la condición

$$x + 1 - 2(\frac{3}{2})\sqrt{x+1} + \frac{9}{4} - 1 - \frac{9}{4} = -\left\{y + 2 - 2(\frac{3}{2})\sqrt{y+2} + \frac{9}{4}\right\} + 2 + \frac{9}{4}$$

$$\sqrt{(x+1)^2} + 2(\frac{3}{2})\sqrt{x+1} + \frac{9}{4} - 1 - \frac{9}{4} = -\left\{\sqrt{(y+2)^2} - 2(\frac{3}{2})\sqrt{y+2} + \frac{9}{4}\right\} + 2 + \frac{9}{4}$$

La idea, otra vez, es completar cuadrados

$$\left(\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}\right)^2-1-\frac{9}{4}=-\left(\sqrt{y+2}-\frac{3}{2}\right)^2+2+\frac{9}{4}$$
$$\left(\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{y+2}-\frac{3}{2}\right)^2=2+1+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}$$
$$\left(\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{y+2}-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{15}{2}$$
$$\left(\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{y+2}-\frac{3}{2}\right)^2=\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2}$$

Ahora, haciendo el cambio de variable tan común en estos casos,pues si $x^2+y^2=r^2$ entonces $x=r\sin\theta$ y $y=r\cos\theta$

$$\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{15}{2}}\sin\theta$$

$$\sqrt{y+2}-\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{15}{2}}\cos\theta$$

Haciendo uso de las desigualdades $-1\leq\sin\theta\leq 1$ y $-1\leq\cos\theta\leq 1$

$$-1\leq\sin\theta\leq 1$$
$$-\sqrt{\frac{15}{2}}\leq\sqrt{\frac{15}{2}}\sin\theta\leq\sqrt{\frac{15}{2}}$$
$$-\sqrt{\frac{15}{2}}\leq\sqrt{x+1}-\frac{3}{2}\leq\sqrt{\frac{15}{2}}$$
$$-\sqrt{\frac{15}{2}}+\frac{3}{2}\leq\sqrt{x+1}\leq\sqrt{\frac{15}{2}}+\frac{3}{2}$$
$$0\leq\sqrt{(x+1)^2}\leq\left(\sqrt{\frac{15}{2}}+\frac{3}{2}\right)^2$$
$$0\leq x+1\leq\left(\sqrt{\frac{15}{2}}+\frac{3}{2}\right)^2$$
$$-1\leq x\leq\left(\sqrt{\frac{15}{2}}+\frac{3}{2}\right)^2-1$$

De forma similar se opera para y, pido al lector tome lápiz y papel y lo realize, debe de obtener

$$-2\leq x\leq\left(\sqrt{\frac{15}{2}}+\frac{3}{2}\right)^2-2$$

Ahora si sumamos ambas ecuaciones

$$-3 \leq x + y \leq 2\left(\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{3}{2}\right)^2 - 3$$

Por tanto

$$-3 \leq P \leq 2\left(\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{3}{2}\right)^2 - 3$$

Referencias

[1] Andreescu, T. and Andrica, D., *360 Problems for Mathematical Contest*, Gil Publishing House, 2003.

[2] *The Olympiad Corner*, 268 (2008), 2005 German Mathematical Olympiad, Final Round, Grades 12-13,Problem 1.

[3] *The Olympiad Corner*, 269 (2008), Hungarian National Olympiad 2004-2005,Round , Grades 11-12,Problem 1.

[4] *The Olympiad Corner*, 268 (2008), 2005 Vietnam Mathematical Olympiad, Day one, Problem 1.