

3.9 LIMITES TRIGONOMETRICOS

Para calcular límites trigonométricos se hará uso, con relativa frecuencia del siguiente teorema.

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\sin \mu}{\mu} = 1$$

Donde $\mu = \mu(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

De éste Teorema se deducen las siguientes proposiciones :

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\mu}{\sin \mu} = 1$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\tan \mu}{\mu} = 1$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\mu}{\tan \mu} = 1$$

OTROS LIMITES :

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\sin \mu}{\mu} = 0$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \cos \mu = 1$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sin \mu = 0$$

Además es necesario, el uso de las IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS y TRANSFORMACIONES, tales como las siguientes :

TRANSFORMACIONES DE SUMA Y DIFERENCIA EN PRODUCTO

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

IDENTIDADES PITAGORICAS

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \operatorname{tag}^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

$$\begin{cases} \sin^2 A = 1 - \cos^2 A \\ \cos^2 A = 1 - \sin^2 A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tag}^2 A = \sec^2 A - 1 \\ 1 = \sec^2 A - \operatorname{tag}^2 A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cot^2 A = \csc^2 A - 1 \\ 1 = \csc^2 A - \cot^2 A \end{cases}$$

132

LIMITES DE FUNCIONES

DENTIDADES RECIPROCAS

$$\sin A \cdot \csc A = 1$$

$$\begin{cases} \sin A = \frac{1}{\csc A} \\ \csc A = \frac{1}{\sin A} \end{cases}$$

$$\cos A \cdot \sec A = 1$$

$$\begin{cases} \cos A = \frac{1}{\sec A} \\ \sec A = \frac{1}{\cos A} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} A \cdot \cot A = 1$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} \\ \cot g A = \frac{\cos A}{\sin A} \end{cases}$$

IDENTIDADES POR DIVISION

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\cot g A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

ANGULO DUPLO

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$$

$$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$$

$$1 - \cos B = 2 \sin^2 \frac{B}{2}$$

$$1 + \cos B = 2 \cos^2 \frac{B}{2}$$

SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ANGULOS

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\operatorname{tg}(A \pm B) = \frac{\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B}{1 \mp \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$$

Arco negativo : $- \theta$

$$|\vec{op}| = |\vec{op'}| = r = 1$$

Tenemos :

$$\sin \theta = y, \sin(-\theta) = -y$$

$$\cos \theta = x, \cos(-\theta) = y$$

$$\text{Luego: } \begin{cases} \sin(-\theta) = -\sin \theta \\ \cos(-\theta) = \cos \theta \end{cases}$$

