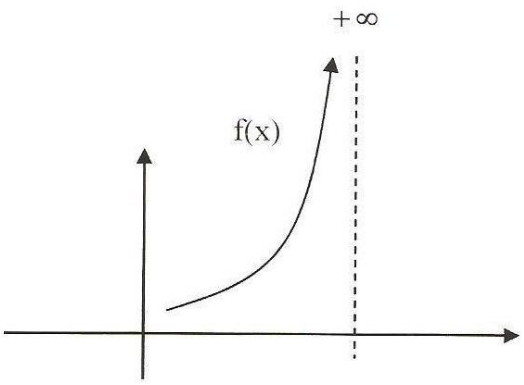
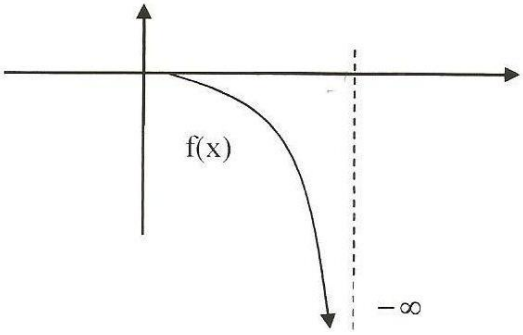
3. LÍMITES INFINITOS

Apreciado participante, en este ítem veremos otro tipo de límite que consiste en evaluar para qué casos la función tiende al más o menos infinito, o mejor dicho cuando la función tiende al infinito positivo en un punto dado:



O al tiende al infinito negativo en un punto dado



Estos criterios nos van a servir más adelante cuando veamos las asíntotas de funciones.

Se tiene lo siguiente;

Si $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0 \rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, es decir, el límite tiende al más o menos infinito y el signo depende de los signos del numerador y el denominador.

Casos que se presentan:

Caso 1:

a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Cuando x tiende a cero por la derecha, significa que x es siempre positivo, entonces $\frac{1}{x}$ tiende al infinito positivo $(+\infty)$

b) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Cuando x tiende a cero por la izquierda, significa que x es siempre negativo, entonces $\frac{1}{x}$ tiende al infinito negativo $(-\infty)$

c) $\lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$

Cuando x tiende a cero por la derecha, significa que x es siempre positivo; pero en el numerador se tiene un valor negativo. Aplicando la ley de signos se cumple que:

$$\left(\frac{(negativo)-}{(positivo)+} = -(negativo) \right)$$

Entonces $\frac{1}{x}$ tiende al infinito negativo $(-\infty)$

d) $\lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$

Cuando x tiende a cero por la izquierda, significa que x es siempre negativo; pero en el numerador se tiene un valor negativo. Aplicando la ley de signos se cumple que:

$$\left(\frac{(negativo)-}{(negativo)-} = +(positivo) \right)$$

Entonces $\frac{1}{x}$ tiende al infinito positivo $(+\infty)$

Caso 2:

a) $\lim_{x \to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$

Cuando x tiende a a por la derecha, significa que $(x-a)$ tiende a cero por la derecha, es decir siempre es positivo, entonces $\frac{1}{x-a}$ tiende al infinito positivo $(+\infty)$

b) $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{1}{x-a} = -\infty$

Cuando x tiende a a por la izquierda, significa que $(x-a)$ tiende al cero por la izquierda, es decir es siempre negativo, entonces $\dfrac{1}{x-a}$ tiende al infinito negativo $(-\infty)$

c) $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{-1}{x-a} = -\infty$

Cuando x tiende a a por la derecha, significa que $(x-a)$ tiende a cero por la derecha, es decir siempre es positivo; pero el numerador tiene un valor negativo. Aplicando nuevamente la ley de signos:

$$\left(\frac{(negativo)-}{(positivo)+} = -(negativo) \right)$$

Entonces $\dfrac{1}{x-a}$ tiende al infinito negativo $(-\infty)$

d) $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{-1}{x-a} = +\infty$

Cuando x tiende a a por la izquierda, significa que $(x-a)$ tiende a cero por la izquierda, es decir, siempre es negativo; pero el numerador tiene un valor negativo. Aplicando nuevamente la ley de signos:

$$\left(\frac{(negativo)-}{(negativo)-} = +(positivo) \right)$$

Entonces $\dfrac{1}{x-a}$ tiende al infinito positivo $(+\infty)$

Le sugerimos, amable participante, que repase bien estos casos porque nos van a servir para entender los ejemplos y resolver los problemas propuestos. Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.

Hallar: $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{5}{(x-4)^2}$

Solución:

Cuando x tiende a 4 por la derecha:

- El numerador asume valores positivos:

$$\lim_{x \to 4^+} 5 = 5 \quad \text{Positivo}$$

- En el denominador: x-4 siempre es positivo o tiende a cero por la derecha:

$$(x-4) \to 0^+$$

Entonces aplicando el caso 2-a) se cumple que: $\dfrac{5}{(x-4)^2} \to +\infty$; es decir:

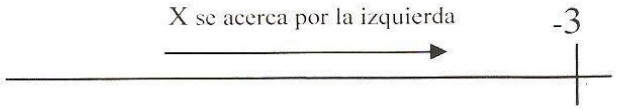
$$\lim_{x \to 4^+} \frac{5}{(x-4)^2} = +\infty$$

Ejemplo 2.

Hallar: $\lim_{x \to -3^-} \dfrac{-8}{(x+3)}$

Solución:

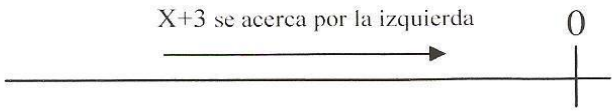
Cuando x tiende a -3 por la izquierda:



- El numerador asume un valor **negativo:**

$$\lim_{x \to -3^-} (-5) = -5 \quad \textbf{Negativo}$$

- El denominador (x+3) tiende a cero por la izquierda, es decir, asume valores **negativos:**



Entonces, aplicando el caso 2-d) $\dfrac{-5}{(x+3)} \to +\infty$

Por lo tanto:

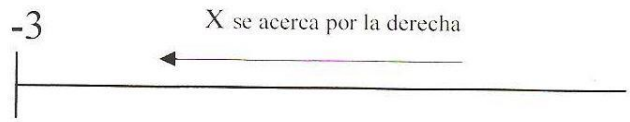
$$\lim_{x \to -3^-} \frac{-5}{(x+3)} = +\infty$$

Ejemplo 3.

Hallar: $\lim_{x \to -3^+} \dfrac{-5}{(x+3)}$

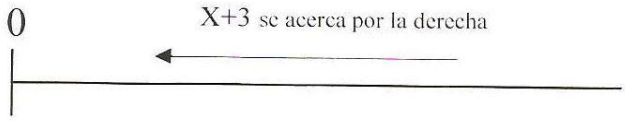
Solución:

Cuando x tiende a "-3" por la derecha:



- El numerador asume un valor **negativo**;

- pero el denominador (x+3) tiende a cero por la derecha, es decir, asume valores positivos:



Entonces, aplicando el caso 2-c) se obtiene:

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{-5}{(x+3)} = -\infty$$

Del ejemplo 2 y 3 y del teorema que enunciamos en límites laterales, podemos afirmar, estimado alumno, que el límite cuando x tiende a -3 no existe:

Porque el límite por izquierda es diferente al límite por derecha

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -3^-} \frac{-5}{(x+3)} = +\infty \\ \lim_{x \to -3^+} \frac{-5}{(x+3)} = -\infty \end{array}\right\} \quad \text{Entonces } \lim_{x \to -3} \frac{-5}{(x+3)} = no \quad existe$$

Ejemplo 4.-

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x^2-4}$$

Solución

Factorizando el denominador:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

Simplificando:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}$$

Como $x \to 2^+$, entonces se cumple que $x-2 \to 0^+$ (cuando x tiende a 2 por la derecha entonces x-2 tiende a cero por la derecha, es decir, siempre es positivo. Entonces aplicando el caso 2-a)

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = +\infty$$

Ejemplo 5.-

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{4x}{x^2-9}$$

Solución

Factorizando el denominador:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{4x}{x^2-9} = \lim_{x\to 3^-} \frac{4x}{(x-3)(x+3)}$$

Cuando x tiende a 3 por la izquierda:

- En el numerador:

$$\lim_{x\to 3^-} 4x = 12 \quad \text{Positivo}$$

- En el denominador: x-3 siempre es negativo o tiende a cero por la izquierda:

$$(x-3)\to 0^-$$

Entonces se cumple que:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{4x}{x^2-9}=\frac{12}{(0^-)(6)}=-\infty$$

Estimado alumno, de esta forma también podemos resolver los problemas identificando el factor en el denominador que tiende a cero por la izquierda o la derecha, y aplicando la ley de signos vemos si la expresión tiende al más o menos infinito.

Ejemplo 6.-

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{5x^3-6}{x^2+x-2}$$

Solución

Factorizando el denominador:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{5x^3-6}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{5x^3-6}{(x+2)(x-1)}$$

Cuando x tiende a 1 por la izquierda:

- En el numerador:

$$\lim_{x\to 1^-} 5x^3-6=5(1)^3-6=-1 \quad \text{Negativo}$$

- En el denominador: x-1 siempre es negativo o tiende a cero por la izquierda:

$$(x-3)\to 0^-$$

Entonces se cumple que:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{5x^3-6}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{5x^3-6}{(x+2)(x-1)}=\frac{(-1)}{(3)(0^-)}$$

Luego aplicando la ley de signos se tiene finalmente:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{5x^3-6}{x^2+x-2}=\frac{(-1)}{(3)(0^-)}=+\infty$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Hallar los siguientes límites infinitos:

1. $\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2}{x^2-4}$ Rpta. $+\infty$
2. $\lim_{x\to 4^-}\frac{x}{x+4}$ Rpta. $+\infty$
3. $\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2}{x^2-4}$ Rpta. $-\infty$
4. $\lim_{x\to -3^-}\frac{4x}{9-x^2}$ Rpta. $+\infty$
5. $\lim_{x\to 5^+}\frac{1}{x-5}$ Rpta. $+\infty$
6. $\lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{1+x}$ Rpta. $-\infty$
7. $\lim_{x\to -1^+}\frac{x-2}{x-1}$ Rpta. $-\infty$
8. $\lim_{x\to 0^+}\frac{2-4x^3}{5x^2+3x^3}$ Rpta. $+\infty$

4. LÍMITES AL INFINITO

Muy bien, amable participante. En este punto veremos cómo se comporta la función cuando la variable x tiende al más o menos infinito.

Cuando x tiende al $\pm\infty$, el límite puede ser un valor numérico L, el infinito positivo o el infinito negativo, dependiendo de la función

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \ .$$

A este tipo de límites se les llama límites al infinito.

Ejemplos:

A. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Cuando x tiende al infinito, la función tiende a cero a través de valores positivos.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$. Cuando x tiende al menos infinito, la función tiende a cero a través de valores negativos.

B. $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to\infty} \frac{8}{(x-1)^2} = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{(x-1)^2} = 0 \end{array}\right\}$ En ambos casos, la función tiende a cero a través de valores positivos.

4.1 . Cálculo de límites que implican la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$

Si $f(x)$ es una función racional (el cociente de dos funciones polinomiales):

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Y si $a_n x^n$ es el término con la mayor potencia de x en el numerador y $b_m x^m$ es el término con la mayor potencia de x en el denominador, entonces:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} .$$

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Hallar $\lim_{x\to\infty} \frac{4-3x^2}{6x^2+3x-1}$

Solución:

Factorizando la máxima potencia del numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-3x^2}{6x^2+3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{4}{x^2}-3\right)}{x^2\left(6+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$$

Simplificando:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-3x^2}{6x^2+3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{4}{x^2}-3\right)}{\cancel{x^2}\left(6+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{4}{x^2}-3\right)}{\left(6+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$$

Tendiendo el límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-3x^2}{6x^2+3x-1}=\frac{((0)-3)}{(6+(0)-(0))}$$

$$=\frac{-3}{6}=-0.5$$

Ejemplo 2:

Hallar: $\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2+7x}{x^3-x^2+4}$

Solución:

Factorizando la máxima potencia del numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2+7x}{x^3-x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(9+\frac{7}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}\right)}$$

Simplificando:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2+7x}{x^3-x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(9+\frac{7}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(9+\frac{7}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}\right)}$$

Tendiendo el límite:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2+7x}{x^3-x^2+4}=\frac{(9+(0))}{(-\infty)(1-(0)+(0))}=0$$

Ejemplo 3:

Hallar $\lim_{x\to\infty}\frac{3-2x+7x^3}{x^2+5x-1}$

Solución:

Factorizando la máxima potencia del numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-2x+7x^3}{x^2+5x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^2}+7\right)}{x^2\left(1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$$

Simplificando:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-2x+7x^3}{x^2+5x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\cancel{3}}\left(\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^2}+7\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^2}+7\right)}{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$$

Tendiendo el límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-2x+7x^3}{x^2+5x-1}=\frac{(+\infty)((0)-(0)+7)}{(1+(0)-(0))}=+\infty$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Hallar los siguientes límites si existen:

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$ Rpta. $\frac{1}{4}$

2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+2x^2-5}{-8x^3+x+2}$ Rpta. $-\frac{1}{2}$

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x+5}{x^3+2x+1}$ Rpta. 0

4. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$ Rpta. 1

5. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+4}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)$ Rpta 3