I. Juegos no-cooperativos

Representación de un juego en forma extensiva

En un *juego no-cooperativo n-personal en forma extensiva* han de considerarse los siguientes componentes: 1) los *jugadores*; 2) los *actos* o *acciones* de ellos; 3) el *orden de dichos actos*; 4) el *conocimiento presente* que en cada momento del juego posee cada jugador, y 5) las *consecuencias finales* que para los jugadores tendrá el modo en que se haya desarrollado el juego.

Así, denótese por N el conjunto de jugadores; éste podrá ser bien $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ si no juega *natura*) ó $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ si juego *natura*. El término *natura* se refiere a cualquier fuente de acontecimientos azarosos. Cuando se quiera referir al cuarto jugador, por ejemplo, se usará: "*jug* 4". Caso que juegue *natura,* se la denotará por 0.

Para dar cuenta del orden de los actos de los jugadores se usa el (K, R), donde K es un conjunto no vacío cuyos elementos serán llamados *nodos* del árbol representativo del juego; y R es una relación binaria en K, llamada "*precedencia*", que es un orden parcial estricto, i.e., irreflexiva[1] y transitiva[2]. Los pares ordenados de esta relación corresponden a los segmentos de recta usados en las figuras usadas para representar gráficamente un juego de este tipo.
La relación R determina otra relación binaria en K, llamada "*precedencia inmediata*", denotada por P, del siguiente modo: $xPy \Leftrightarrow xRy \wedge \neg\exists z, (xRz \wedge zRx)$. Así, se dice que $P(x) := \{y \text{ de } K\text{: } yPx\}$ es el conjunto de los "*predecesores inmediatos*" de x, y que $P^{-1}(x) := \{z \text{ de } K\text{: } xPz\}$ es el conjunto de "*sucesores inmediatos*" de x.

<u>Asunción 1</u>: $\exists!\ x_0$ en K, $P(x_0) := \emptyset$. A este nodo, x_0 , se lo llama *"nodo inicial"*.

<u>Asunción 2</u>: $\forall x$ de $K \setminus \{ x_0\}$, $\exists!\ m$ de $\mathbb{N}$, $\exists!\ (x_0, x_1, \ldots, x_m)$ tal que $x = x_m \wedge x_0 \in P(x_1) \wedge \ldots \wedge x_{m-1} \in P(x_m)$. De una sucesión tal se dice que es una "*senda*".
Una consecuencia inmediata, y que se deja como un ejercicio para el estudiante, es la que concluye que: $\forall x \neq x_0$, $1 = \# P(x)$.

<u>Asunción 3</u>: No existe ninguna senda de longitud infinita y toda senda es subsenda de otra que termina en un nodo carente de sucesores inmediatos, es decir que si se define el conjunto de *nodos terminales* como $Z := \{x \text{ de } K\text{: } P^{-1}(x) = \emptyset\}$, entonces $\forall$senda $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$, $\exists$una senda $(x_0, z_1, \ldots, z_k)$ tal que $k \geq m \wedge z_k \in Z \wedge z_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge z_m = x_m$.

<u>Ejercicio:</u> ¿Podría haber un caso en el que satisfaciéndose estas asunciones haya, sin embargo, una cantidad infinita de nodos?

---

[1] $\forall x$ de K, $\neg\, xRx$.
[2] $\forall x$, y y z de K, $(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$.

El orden de los actos de los jugadores es determinado como sigue.
Se tiene una partición[1], $\{K_0, K_1, \ldots, K_n\}$, de $K \setminus Z$, tal que K_0 no entra si no juega natura. Para $i > 0$, K_i es el conjunto de nodos en los que toca jugar al *jug i*.
Hay una correspondencia, A, que a cada nodo, x, asigna el conjunto de actos disponibles, $A(x)$, al *jug i*, si $x \in K_i$.
Además, de cada $A(x)$ hay una biyección a $P^{-1}(x)$, denotada por b_x. Ella indica a qué nodo sucesor inmediato de x llevará el acto que el jugador decida realizar.

El conocimiento presente de cada jugador es determinado por particiones dadas, H_i, de los conjuntos K_i. Así, si en un momento dado el juego se encuentra en un nodo de un elemento h de la partición H_i de K_i, entonces el *jug i* no sabrá exactamente en qué nodo de h se encuentra el juego. Por ello, ha de asumirse que la correspondencia A es tal que $A(x) = A(y) \Leftarrow \{x, y\} \subseteq h$ [2]. De esta manera, el jugador no podrá distinguir entre los diferentes nodos de h. Se llaman *conjuntos de información del jug i* los elementos de la partición H_i de K_i.

Finalmente, en lo tocante a las consecuencias finales que para los jugadores tendrá el modo en que se haya desarrollado el juego, ha de asumirse que cada jugador (no natura) posee una relación de preferencias[3] en el conjunto de nodos terminales Z. Según la *teoría de la utilidad esperada* de von Neumann, podrá asumirse que dichas relaciones de preferencias estarán representadas por una función de utilidad lineal si es que las preferencias satisfacen ciertas propiedades. Esto es lo que ha de presentarse a continuación.

Teoría de la utilidad esperada de von Neumann[4]

Hay un conjunto finito no vacío, O, cuyos elementos son llamados "*opciones*"; y hay un agente decisorio que, aunque querría poder escoger una opción, no puede hacerlo y debe, en cambio, contentarse con escoger entre *loterías*[5] sobre las opciones.
Así, si $\#O = m$, entonces una lotería estaría dada simplemente por un vector p de $\mathbb{R}_+^m$ tal que sus componentes (innegativos) sumen 1.

Es posible también considerar loterías *compuestas*, esto es, loterías algunos de cuyos premios sean también loterías. Por ejemplo, si $m = 3$, podría tenerse una lotería que ofreciera con probabilidad ½ la primera opción y con probabilidad ½ la lotería (1/3, 0 2/3). Entonces, esto equivaldría a esperar la primera opción con probabilidad ½ + 1/6, la segunda opción con probabilidad 0 y la tercera opción con probabilidad 1/3, es decir, equivaldría a la lotería (4/6, 0, 1/3). Así, toda lotería *compuesta* determina una lotería *simple*.
En adelante se asumirá que al agente decisorio sólo le interesa la lotería simple determinada por la lotería compuesta que se le ofrezca.

[1] Una *partición* de un conjunto C es una colección de subconjuntos no vacíos de él tal que su unión dé C y todas las intersecciones de pares diferentes de ellos son vacías.
[2] Por tal razón puede escribirse sin ambigüedad $A(h)$ para denotar tales conjuntos $A(x)$ y $A(y)$.
[3] Es decir, una relación binaria transitiva y *total* (cualesquiera dos elementos son comparables según la relación).
[4] Mas-Colell *et al.*, *Microeconomic theory*, OUP, 1995.
[5] Una "*lotería*" sobre O es una distribución probabilística sobre O.

Sea,pues, $\mathcal{L}$ el conjunto de todas las loterías simples sobre el conjunto de opciones $O = \{o_1, \ldots, o_m\}$. Se asume que el agente posee una relación de preferencias, $\succsim$, sobre $\mathcal{L}$.

El conjunto de loterías, $\mathcal{L}$, puede identificarse con el *simplejo* de $\mathbb{R}^m$ que se define por:

$\Delta^m := \{p$ de $\mathbb{R}^m$ tal que $p \geq 0 \wedge 1 = \sum_1^m p_i\}$. Ha de notarse que este simplejo es *convexo*[1].
Luego, resulta que cualquier combinación convexa de loterías simples es una lotería simple.
Se asume que esta relación de preferencias es (1) *continua* e (2) *independiente*, esto es, que cualesquiera sean las loterías p, q y r, (1) son cerrados en [0, 1] los conjuntos $\{\alpha$ de $[0, 1]$: $\alpha p + (1\text{-}\alpha) q \succeq r\}$ y $\{\alpha$ de $[0, 1]$: $p \succeq \alpha q + (1\text{-}\alpha) r\}$; y (2) que si $p \sim q$, entonces, $\alpha p + (1\text{-}\alpha) r \sim \alpha q + (1\text{-}\alpha) r$.
Como bien se sabe por Microeconomía, la propiedad de continuidad en la relación de preferencias garantiza la existencia de funciones de utilidad continuas representativas de ella. En este caso eso es perfectamente aplicable pues el conjunto de loterías simples sobre O¸ puede verse como un subconjunto de $\mathbb{R}_+^m$, a saber, el Δ^m.

Sin embargo, lo que más interesa en este contexto es que haya funciones de utilidad para la relación de preferencias que además de ser continuas tengan la *forma de utilidad esperada* como la define von Neumann.

<u>Definición</u>: Se dice que una función de utilidad para $\succsim$, U, sobre $\mathcal{L}$ tiene *forma de utilidad esperada* (ó que es *de von Neumann*), si existe un vector u en $\mathbb{R}^m$ tal que $\forall p$ de $\mathcal{L}$, $U(p) = u \cdot p$.
Al respecto hay tres teoremas de gran importancia en este contexto.

<u>Teorema 1</u>: Una función de utilidad para $\succsim$, U, sobre $\mathcal{L}$ tiene forma de utilidad esperada si, y sólo si, (en adelante: "*ssi*") U es *lineal*, esto es, que la imagen de toda combinación convexa de loterías sea esa misma combinación convexa de las imágenes de las loterías: $U(\sum_{k=1}^{K}\alpha_k p^k) = \sum_{k=1}^{K}\alpha_k U(p^k)$, $\forall K$ de $\mathbb{N}$, $\forall p^1, \ldots, p^K$ de $\mathcal{L}$, $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_K$ innegativos de suma 1.

⌈1º) La necesidad de la condición ($\Rightarrow$):

Asúmase que $U(\cdot)$ tiene forma de utilidad esperada. Entonces, por definición, $\exists u$ en $\mathbb{R}^m$ tal que $\forall p$ de Δ^m, $U(p) = u \cdot p$. Hay que $U(\cdot)$ demostrar que es lineal en el sentido del enunciado. Entonces, se sigue que $U(\sum_{k=1}^{K}\alpha_k p^k) = u \cdot \sum_{k=1}^{K}\alpha_k p^k = \sum_{k=1}^{K}\alpha_k (u \cdot p^k) =$

---

[1] Un conjunto, C de $\mathbb{R}^m$ es *convexo* si le pertenecen todas las combinaciones convexas de sus elementos, i.e., que si se toma un subconjunto finito cualquiera de C, digamos $\{x_1, \ldots, x_n\}$, entonces $\forall(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ de $\mathbb{R}_+^n$ tal que $1 = \sum_1^n \alpha_i$, se tiene que $\sum_1^n \alpha_i x_i \in C$.

$\sum_{k=1}^{K}\alpha_k U(p^k)$. En esta secuencia de igualdades la segunda vale por la linealidad del producto interno de vectores, y la tercera, porque $U(\cdot)$ tiene forma de utilidad esperada. Uniendo los dos extremos de dicha secuencia, se concluye que U es lineal.

2º) La suficiencia de la condición ($\Leftarrow$):
Sea que $U(\cdot)$ es lineal en el sentido del enunciado. Hay que demostrar que existe un vector, u, tal que $\forall p$ de $\mathcal{L}$, $U(p) = u \cdot p$. Sean $s^1, \ldots, s^m$ las loterías que con certeza dan respectivamente las opciones $o_1, \ldots, o_m$. Entonces, cualquiera sea p de $\mathcal{L}$, se tendrá que $U(p) = U(\sum_{i=1}^{m} p_i^k s^i) = \sum_{i=1}^{m} p_i^k U(s^i)$.

Ahora, si se definen los coeficientes $u_i := U(s^i)$, se obtendrá que $U(p) = p \cdot u$.⌋

Teorema 2: Si U es una función de utilidad para $\succsim$ en forma de utilidad esperada para $\succsim$, entonces cualquier otra función de utilidad para $\succsim$, $U^* : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$, tiene forma de utilidad esperada ssi $\exists c > 0$, $\exists d$, tales que $U^*(p) = cU(p) + d$, $\forall p$ de $\mathcal{L}$.

⌈ 1º) Suficiencia de la condición ($\Leftarrow$) :
Por el teorema anterior, bastará con demostrar que la condición de la derecha del *ssi* implica la linealidad de $U(\cdot)$. Así, pues, dada una combinación convexa cualquiera de loterías simples, $U^*(\sum_{k=1}^{K}\alpha_k p^k) = c\, U(\sum_{k=1}^{K}\alpha_k p^k) + d = c \sum_{k=1}^{K}\alpha_k U(p^k) + (\sum_{k=1}^{K}\alpha_k)\, d =$ $\sum_{k=1}^{K}\alpha_k (cU(p^k)+d) = \sum_{k=1}^{K}\alpha_k U^*(p^k)$. En esta secuencia de igualdades, la primera vale por hipótesis sobre $U^*(\cdot)$; la segunda, por la hipótesis sobre $U(\cdot)$ y el teorema 1; la tercera es un simple reacomodo algebraico, y la cuarta nuevamente por la hipótesis sobre $U^*(\cdot)$. Uniendo ambos extremos de la secuencia se obtiene la linealidad de $U^*(\cdot)$.

2º) Necesidad de la condición ($\Rightarrow$):
Sea, pues, $U^*(\cdot)$ una función de utilidad para $\succsim$ en forma de utilidad esperada.
Entonces, puede concluirse que existen loterías *óptima* y *pésima*, i.e., $\exists p^o, \exists p^p$ en $\mathcal{L}$ tales que $\forall\, p$ de $\mathcal{L}$, $p^o \succeq p \succeq p^p$; en efecto, es que $U(\cdot)$ es continua por ser lineal, y ya que $\mathcal{L}$ es compacto, pues $\mathcal{L} \equiv$ [1] Δ^m ; se sigue que $U(\cdot)$ ha de alcanzar un valor máximo y un valor mínimo en $\mathcal{L}$.
Además, puede establecerse que $\forall p$ de $\mathcal{L}$, $\exists \alpha \in [0, 1]$, $p = \alpha\, p^o + (1-\alpha)\, p^p$, pues (i), caso que $p^o \succ p^p$, basta con definir $\alpha := \dfrac{U(p)-U(p^p)}{U(p^o)-U(p^p)}$; y (ii), caso que $p^o \sim p^p$, como todas las loterías son indiferentes entre sí, cualquier función de utilidad de $\succeq$

---

[1] El símbolo ≡ sólo se usa para indicar una posible *identificación*, i.e., una igualdad convencional que no va contra el contexto.

deberá ser constante, y cualesquiera sean las constantes k_1 y k_2, siempre habrá algún $c > 0$ y algún d tales que $k_2 = c\, k_1 + d$.
Volviendo al caso (i), de la definición de α se sigue que $U(p) = \alpha\, U(p^o) + (1\text{-}\alpha)\, U(p^p) = U(\alpha\, p^o + (1\text{-}\alpha)\, p^p)$, de lo que se sigue que $p \sim (\alpha\, p^o + (1\text{-}\alpha)\, p^p)$.
Por lo tanto, como $U^*(\cdot)$ tiene forma de utilidad esperada, se tiene que $U^*(p) = U^*(\alpha\, p^o + (1\text{-}\alpha)\, p^p) = \alpha\, (U^*(p^o) - U^*(p^p)) + U^*(p^p)$. Si ahora se remplaza α por su definición, se sigue que $U^*(p) = c\, U(p) + d$, donde $c := \dfrac{U^*(p^o) - U^*(p^p)}{U(p^o) - U(p^p)}$ y $d := U^*(p^p) - U(p^p)$.⌋

<u>Teorema 3 (de von Neumann)</u>: Si $\succsim$ es continua e independiente, entonces hay alguna función de utilidad en forma de utilidad esperada para $\succsim$

⌈En el teorema anterior ya se estableció que existen loterías óptima y pésima en $\mathcal{L}$, a saber, p^o y p^p. Si ocurriera que $p^o \sim p^p$, entonces cualquier función constante sería una función de utilidad en forma de utilidad esperada.
Luego, sólo hay que considerar el caso en que $p^o \succ p^p$. En tal caso pueden demostrarse (¡quedan como ejercicios!) los siguientes resultados:

1) $\forall p, p'$ de $\mathcal{L}$, $(p \succ p' \Rightarrow \forall \alpha \in\,]0, 1[,\ p \succ \alpha p + (1\text{-}\alpha)p' \succ p')$.
Basta con demostrar que:
$(p \succ p' \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0, 1], \forall p'', \alpha p + (1\text{-}\alpha)p'' \succ \alpha p' + (1\text{-}\alpha)p'') \wedge$
$(p \sim p' \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0, 1], \forall p'', \alpha p + (1\text{-}\alpha)p'' \sim \alpha p' + (1\text{-}\alpha)p'') \wedge$
$(p \succ p' \wedge p'' \succ p''' \Rightarrow \forall \alpha \in [0, 1], \alpha p + (1\text{-}\alpha)p'' \succ \alpha p' + (1\text{-}\alpha)p''')$.
Ahora solo hay que usar reducción al absurdo.

2) $\forall \alpha, \beta$ de $]0, 1[$, $(\beta p^o + (1\text{-}\beta)p^p \succ \alpha p^o + (1\text{-}\alpha)p^p \Leftrightarrow \beta > \alpha)$.
Basta comprobar que si se define $\gamma := (\beta\text{-}\alpha)/(1\text{-}\alpha)$, entonces
$\beta p^o + (1\text{-}\beta)\, p^p \sim \gamma\, p^o + (1\text{-}\gamma)\, (\alpha p^o + (1\text{-}\alpha)p^p)$.   (i)
Ahora hay que deducir que $p^o \succ \alpha p^o + (1\text{-}\alpha)p^p$.
De esto se sigue que: $\gamma\, p^o + (1\text{-}\gamma)\, (\alpha p^o + (1\text{-}\alpha)p^p) \succ \alpha p^o + (1\text{-}\alpha)p^p$.   (ii)
Finalmente, de (i) y (ii), se sigue (2).

3) $\forall p$ de $\mathcal{L}$, $\exists!\, \alpha_p \in [0, 1]$, $p \sim \alpha_p\, p^o + (1\text{-}\alpha_p)p^p$.
La unicidad se sigue de (2) y la existencia se sigue del hecho de que $\succsim$ es continua y el segmento [0, 1] es conexo, i.e., no es la unión de subconjuntos disjuntos y no vacíos.

4) Defínase la función $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto U(p) := \alpha_p$. Entonces, $U(\cdot)$ es una función de utilidad para $\succeq$.

5) $U(\cdot)$ es una función lineal en el sentido de la definición del teorema 1, y, por lo tanto, gracias a ese mismo teorema, es también una función en forma de utilidad esperada.

También hay que tener en cuenta sólo la definición de $U(\cdot)$ los puntos anteriores. ⌋

Las demostraciones detalladas de estos tres teorema pueden verse en el texto ya citado de Mas-Colell et al.

Volviendo a la teoría de juegos no-cooperativos en forma extendida, es de notarse que, como en ellos los agentes no pueden por sus propios medios garantizarse la culminación del juego en ningún nodo terminal determinado, todo lo que puede asumirse que ellos posean es sólo una relación de preferencias sobre el conjunto de loterías simples sobre Z. Entonces, si dicha relación de preferencias es continua e independiente, podrá asumirse que existen funciones de utilidad en forma de utilidad esperada para cada relación de preferencias de los jugadores en el conjunto de loterías simples sobre Z. Denótense dichas funciones de utilidad por $\pi_1, \ldots, \pi_m$. De este modo, el último componente del juego no-cooperativo en forma extendida es una sucesión finita $(\pi(z))_{z \in Z}$, siendo $\pi(z) = (\pi_1(z), \ldots, \pi_m(z))$.
En definitiva, un juego no cooperativo *n-personal* en forma extensiva se representará por el quíntuple ordenado $((K_i)_0^n, R, (H)_0^n, (A(x))_{x\in K\setminus Z}, (\pi(z)_{z\in Z}))$ si juega *natura*, y por $((K_i)_1^n, R, (H)_1^n, (A(x))_{x\in K\setminus Z}, (\pi(z)_{z\in Z}))$ si no juega *natura*.

`

Representación de un juego en forma estratégica

En un juego *n-personal* en forma extensiva, Γ, como acaba de indicarse tres líneas antes, se definen las estrategias de los jugadores como indicaciones precisas, por parte de cada jugador, acerca de cómo hay que jugar cada vez que sea su turno.
Definición: 1) Una "*estrategia*" del *jug i* es cualquier función, s_i, definida en H_i y que tome valores en $A_i := \bigcup_{h\in H_i} A(h)$, debiendo cumplirse que $\forall h$ de H_i, $s_i(h) \in A(h)$.
2) Se denotará el conjunto de todas las posibles estrategias del *jug i* por S_i.
3) Un "*perfil de estrategias*" es cualquier $(s_1, \ldots, s_n) \in S_1 \times \ldots \times S_n$.
Ha de notarse que cada perfil de estrategias determina una senda que acaba en un nodo terminal y que, por ende, hay una función $\zeta : S_1 \times \ldots \times S_n \to Z$ que asigna a cada perfil de estrategias un único nodo terminal.
Finalmente, como en cada nodo terminal ya está determinado el vector $\pi(z) = (\pi_1(z), \ldots, \pi_m(z))$, puede considerarse la función compuesta $\pi^* := \pi \circ \zeta : S_1 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$; en este contexto de representación estratégica, la función π^* que acaba de definirse será representada simplemente por π.
Con esta notación la representación en forma normal de un juego no cooperativo n-personal es: $G := ((S_i)_1^n, (\pi_i)_1^n)$.

Ejemplos:
1) La batalla de los sexos
2) El dilema del prisionero
3) El reparto de la torta.

Extensión mixta de un juego en forma normal

Se define una *estrategia mixta del jug i* en el juego *n-personal G*, como cualquier distribución probabilística sobre su conjunto S_i de estrategias (de ahora en adelante llamadas "*puras*"). Así, si σ_i es una estrategia mixta del *jug i*, entonces $\sigma_i = (\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{ir_i})$, siendo $\sigma_{iq} := \sigma_i(s_{iq})\ \forall q$ de $\{1, \ldots, r_i\}$.

El conjunto de todas las estrategias mixtas del *jug i* se representará por Σ_i , el cual, si $\# S_i = r_i$, será el simplejo Δ^{r_i} del espacio euclídeo de dimensión r_i .
La *extensión mixta del juego G* se define como $G^* := ((\Sigma_i)_1^n, (\pi'_i)_1^n)$, en donde las funciones π'_i se definen como los pagos esperados al *jug i* según el complejo de distribuciones $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) =: \sigma$. Esto es, que $\pi'_i(\sigma) = \sum_{q_1,\ldots q_n=1}^{r_1,\ldots,r_n} \pi_i(s_{1q_1},\ldots,s_{nq_n})\sigma_{1q_1}\ldots\sigma_{nq_n} =$ $E[\pi_i \mid \sigma]$.

Notas:
1)En adelante, en vez de escribir $\pi'_i(\sigma)$, se escribirá simplemente $\pi_i(\sigma)$ sin temor a confusión.
2) Una estrategia mixta puede verse como un "*mecanismo aleatorio*" sobre el conjunto de estrategias puras del jugador.

Hay otra forma en que los jugadores pueden "aleatorizar" sus intervenciones en el juego. Ella consiste en que cada jugador empleará un mecanismo aleatorio sobre cada uno de sus conjuntos de información; a esto se llamará una "*estrategia conductual*". Para el *jug i* , una tal estrategia conductual puede verse como una función definida en H_i, la colección de conjuntos de información del *jug i* , y que toma valores en el conjunto de distribuciones probabilísticas sobre las acciones disponibles a ese jugador, $\Delta(A_i)$; es decir, $\gamma_i : H_i \to \Delta(A_i)$, tal que $\forall h$ de H_i , $\forall\ a$ de A_i ($\gamma_i(h)(a) = 0$ si $a \notin A(h)$). En otras palabras, el soporte[1] de $\gamma_i(h) \subseteq A(h)$.
El conjunto de todas las estrategias conductuales del *jug i* se denota por Ψ_i .

Cabe preguntarse cuál de estas dos formas de "aleatorizar" es más conveniente. La respuesta, parcial, es que en un juego con "*memoria perfecta* [2]", ambas son equivalentes en el sentido de que cualquiera que sea la estrategia mixta del *jug i*, haya una estrategia conductual de él tal que asigne a cada uno de sus conjuntos de información una distribución que dé a cada acción posible para dicho conjunto de información la probabilidad, según aquella estrategia mixta, de que en dicho conjunto de información el jugador escoja precisamente esa acción posible. Dicho de modo simbólico: $\forall$*jug i*, $\forall \sigma_i \in \Sigma_i$, $\exists \gamma_i \in \Psi_i$, $\forall h$ de H_i , $\forall a$ de h , se tenga que $\gamma_i(h)(a) = \Pr b_{\sigma_i}(s_i(h) = a \mid h)$.

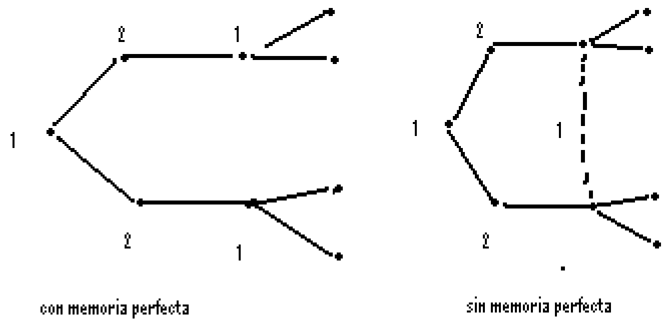
Definición : Se dice que un juego Γ en forma extensiva posee "*memoria perfecta*" si ningún jugador olvida en ningún momento del juego ni sus acciones previas ni lo que antes supo, esto es:
1) que el *jug i* no olvide la acción a de $A(x)$ que ya adoptó en el nodo x de K_i significa que si $x \in P(x') = P(x'') \wedge x' \neq x''$, entonces $\forall\ \hat{x}, \tilde{x} \in K_i, (x'R\hat{x} \wedge x''R\tilde{x}) \Rightarrow (h(\hat{x}) \neq h(\tilde{x}))$;

---

[1] Se llama "*soporte de una distribución probabilística*" al conjunto de elementos de probabilidad positiva.
[2] Ver la definición correspondiente en el siguiente párrafo.

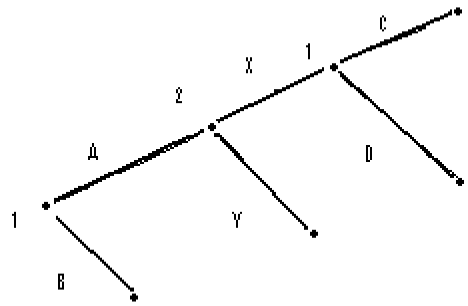
2) que el *jug i* no olvide ninguna información que haya conocido, es decir, que si él en algún momento carece de cierta información, entonces siempre habrá carecido de ella. Dicho simbólicamente: $(x, x', y \in K_i \wedge x' \in h(x) \wedge yRx) \Rightarrow (\exists y' \in h(y), y'Rx')$ (adviértase que y' bien podría ser igual a y).

Ejemplo (que muestra un juego con memoria perfecta y otro sin ella):



Ejemplo (que ilustra cómo para cada estrategia mixta hay una estrategia conductual tal que a cada acción posible de un jugador le asigna la misma probabilidad que ella tendría según la mixta):

Sea una σ_i una estrategia mixta cualquiera del *jug i* ; entonces hay una estrategia conductual de dicho jugador γ_i tal que $\forall a$ de $A(h)$, $\gamma_i(h)(a) = \Pr b_{\sigma_i}(s_i(h) = a | h)$. Considérese, por ejemplo, el juego



Las estrategias del *jug 2* pueden simplemente representarse como X y Y, pues el *jug 2* no posee sino un conjunto de información, de modo que sus dos posibles estrategias serían de la forma $\{(h, X)\}$ y $\{(h, Y)\}$. Similarmente, las estrategias del *jug 1* pueden representarse como (A, C), (A, D), (B, C) y (B, D), pues, teniendo dicho jugador dos conjuntos de información, sus estrategias son de la forma $\{(h_{11}, A), (h_{12}, C)\}$, etc. Entonces, $S_1 = \{(A, C),(A, D),(B, c),(B, D)\}$. Sea, por ejemplo, $\sigma_1 = (½ , 0, 0, ½)$. Luego, $\Pr b_{\sigma_i}(s_i(h_{12}) = D) = \sum_{\{s_1 \in S_1 : s_1(h_{12}) = D\}} \sigma_1(s_1) = \sum_{\{(A,D),(B,D)\}} \sigma_1(s_1) = \sigma_1((A,D)) + \sigma_1((B,D)) = 0 +$

½ = ½. Pero $\Pr b_{\sigma_i}(s_i(h_{12}) = D | h_{12}) = \dfrac{\Pr b_{\sigma_i}((s_i(h_{12}) = D) \cap \{h_{12}\})}{\Pr b_{\sigma_1}(\{h_{12}\})} =$

$\dfrac{\Pr b_{\sigma_i}(\{(A,D),(B,D)\} \cap \{(A,C),(A,D)\})}{1/2} = \dfrac{\Pr b_{\sigma_i}(\{(A,D)\})}{1/2} = \dfrac{0}{1/2} = 0.$

Por lo tanto si γ_1 es la estrategia conductual que ha de asignarse a σ_1 , entonces ha de ser necesario que $\gamma_1(h_{12})(C) = 1 \wedge \gamma_1(h_{12})(D) = 0$.

<u>Determinación de estrategia conductual por estrategia mixta</u>

En un juego en forma extensiva, Γ, sea σ_i una estrategia mixta del *jug i* ; entonces ha de asociársele la estrategia conductual γ_i que se define a continuación.
Primero defínese, para cada conjunto de información, *h*, de ese jugador el subconjunto $S'_i(h) := \{s_{iq} \in S_i : \exists s_{-i}, 0 < \mathrm{Prb}_s$ (la senda que s determina pasa por h)$\}$[1].
Luego, ya puede definirse γ_i mediante:

$$\gamma_i(h)(a) := \frac{\left(\sum_{\{s_i \in S'_i(h) : s_i(h) = a\}} \sigma_i(s_i)\right) \div \left(\sum_{s_i \in S'_i(h)} \sigma_i(s_i)\right), si \quad 0 < \sum_{\{s_i \in S_i : s_i(h) = a\}} \sigma_i(s_i)}{\sum_{\{s_i \in S_i : s_i(h) = a\}} \sigma_i(s_i)}.$$

[1] Se usa la notación que llama, por ejemplo, s_{-2} al (s_1, s_3) si es que $s = (s_1, s_2, s_3)$. Así, s también se pone como (s_2, s_{-2}).