Pontificia Universidad Católica del Perú
Escuela de Posgrado - Maestría en Matemáticas Aplicadas
MAT657 - Teoría de Juegos

# Elementos básicos de juegos no cooperativos

Tomado de:
Mas-Colell, A., M. Whinston and J. Green (1994). Microeconomic Theory. Oxford University Press. Capítulo 7.

## 1 Representación en forma extensiva de un juego

$$E = \{\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{I}, p(\cdot), \alpha(\cdot), \mathcal{H}, H(\cdot), \iota(\cdot), \rho(\cdot), u\}$$

**1** Nodos, acciones y jugadores:

- $\mathcal{N}$: conjunto finito de nodos.
- $\mathcal{A}$: conjunto finito de posibles acciones.
- $\mathcal{I}$: conjunto finito de jugadores $\{1, \ldots, I\}$.

**2** Tipos de nodos:

- $p : \mathcal{N} \to \mathcal{N} \cup \emptyset$ (función predecesora).
- $p(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in \mathcal{N}$, excepto uno, al cual se le denominará nodo inicial $x_0$.
- $s(x) = p^{-1}(x)$ denota al conjunto de todos los sucesores de $x$.

Para tener una estructura de arbol: $p(x) \cap s(x) = \emptyset$.
Nodos terminales: $T = \{x \in \mathcal{N} : s(x) = \emptyset\}$.
Nodos de decisión: $\mathcal{N} \setminus T$.

**3** Función predecesora:

- $\alpha : \mathcal{N} \setminus \{x_0\} \to \mathcal{A}$ función que asigna a cada nodo no inicial la acción que lo conecta con su predecesor inmediato.

Se debe satisfacer
$$x', x'' \in s(x) \text{ y } x' \neq x'' \Longrightarrow \alpha(x') = \alpha(x''),$$
o, equivalentemente, nodos sucesores de $x$ que son distintos se alcanzan con acciones distintas.
Conjunto de elecciones disponibles desde un nodo $x$:

$$C(x) = \{a \in \mathcal{A} : a = \alpha(x'), \text{ para algún } x' \in s(x)\}.$$

El anterior es el conjunto de acciones que lo conectan con algún nodo inmediatamente sucesor.

**4** Información del juego:

- $\mathcal{H}$: colección de conjuntos de información ($\mathcal{H}$ es una partición de $\mathcal{N}$).
- $H : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{H}$, asigna a cada nodo el conjunto de información al que pertenece.
- $H(x) = H(x') \Longrightarrow c(x) = c(x')$ (si dos nodos pertenecen a un mismo conjunto de información, las elecciones disponibles para estos deben ser las mismas.
- $C(H) = \{a \in \mathcal{A} : a \in c(x) \text{ para } x \in H\}$.

**5** Información individual:

- $\iota : H \rightarrow \{0, 1, \ldots, I\}$ a cada conjunto de información le asigna el individio que tiene que mover en dicho nodo.
- $\mathcal{H}_i = \{H \in \mathcal{H} : i = \iota(H)\}$ colección de conjuntos de información de $i$.

**6** Natura (eventos exógenos):

- $\rho : H_0 \times A \rightarrow [0, 1]$ asigna probabilidades a las acciones en los conjuntos de información donde natura mueve.
- $\rho(H, a) = 0$ si $a \notin C(H)$.
- $\sum_{a \in C(H)} \rho(H, a) = 1$, para todo $H \in \mathcal{H}_0$.

**7** Pagos:

- $u = \{u_1(\cdot), \ldots, u_I(\cdot)\}$ funciones de pago que asignan "útiles" a los jugadores en cada nodo terminal alcanzado:
- $u_i : T \rightarrow \mathbb{R}$.

Nota: bajo realizaciones aleatorias de resultados, cada $u_i$ toma la forma de una función de utilidad de Bernoulli.

**Definition 1** *Un juego es de información perfecta si cada conjunto de información posee un único nodo.*

**Definition 2** *Sea $\mathcal{H}_i$ la colección de conjuntos de información del jugador $i$, $\mathcal{A}$ el conjunto de acciones posibles en el juego y $C(H) \subset \mathcal{A}$ el conjunto de acciones posibles en el conjunto de información $H$. Una estrategia para el jugador $i$ es una función:*

$$s_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{A} \text{ tal que } s_i(H) \subset C(H) \text{ para todo } H \in \mathcal{H}_i.$$

Notar: una estrategia asigna una accion posible a cada conjunto de información.

## 2 Representación en forma normal de un juego

**Definition 3** *Para un juego con $I$ jugadores, la representación en forma normal de un juego $\Gamma_N$ especifica para cada jugador $i$, una colección de estrategias $s_i$ (con $s_i \in S_i$) y una función de pago $u_i(s_1, \ldots, s_I)$ que devuelve los niveles de utilidad von Neumann-Morgenstern asociados a los resultados (probablemente aleatorios) que surgen de las estrategias $(s_1, \ldots, s_I)$ $\Gamma_N = (I, \{S_i\}, \{u_i\})$.*

**Definition 4** *Dado el conjunto (finito) de estrategias puras $S_i$, una estrategia mixta para el jugador $i$, $\sigma_i : S_i \rightarrow [0,1]$ asigna a cada estrategia pura $s_i \in S_i$ una probabilidad $\sigma_i : (s_i) \geq 0$ de que sea jugada, donde $\sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i) = 1$.*

**Definition 5** *Dado un juego en forma extensiva $\Gamma_E$, una estrategia de comportamiento para el jugador $i$ específica, para cada conjunto de información $H \in \mathcal{H}_i$ y acción $a \in C(H)$, una probabilidad $\lambda_i(a, H) \geq 0$, con $\sum_{a \in C(H)} \lambda_i(a, H) = 1$, para todo $H \in \mathcal{H}_i$.*